Vol. 4. Nro. 1.
ISSN: 2765-8252
Recepción: 28-10-2020 Aprobación: 12-01-2021

Diagnóstico del desarrollo del pensamiento matemático avanzado en la formación inicial del profesor de Matemática

Diagnostic of the development of advanced mathematical thinking in the initial formation of the Mathematics teacher

Carlos Manuel Caraballo Carmona[1] (carlosm.caraballo@upr.edu.cu) (https://orcid.org/0000-0002-7516-9973)

Serdaniel Nieves Pupo[2] (serdaniel.nieves@gmail.com) (https://orcid.org/0000-0003-1199-2183)

Yamila Caridad Páez Hernández[3] yamila.paez@upr.edu.cu (https://orcid.org/0000-0003-4753-8978)

Resumen

En este artículo se presentan los principales resultados de un estudio y diagnóstico del desarrollo del pensamiento matemático avanzado, en la formación inicial del profesor de matemática desde la disciplina Análisis Matemático. Inicialmente, se realiza una sistematización de algunas concepciones teóricas sobre este tipo de pensamiento hasta llegar a su definición y parametrización; posteriormente, se implementa una prueba pedagógica interactiva a los estudiantes y se realiza un análisis integral de los resultados, complementándolos con entrevista a los estudiantes, observación a clases y encuesta a profesores.

Palabras claves: pensamiento matemático avanzado, formación inicial

Abstract
This article presents the main results of a study and diagnosis of the development of advanced mathematical thinking, in the initial training of the mathematics teacher from the discipline of Mathematical Analysis. Initially, it is carried out a systematization of some theoretical conceptions on this type of thought until arriving to its definition and parameterization; later, an interactive pedagogical test is implemented to the students and an integral analysis of the results is carried out, complementing them with interviews to the students, observation to classes and survey to professors
Key words: advanced mathematical thinking, initial formation

[1] Doctor en Ciencias y Profesor Titular, de la Universidad Hermanos Saiz Montes de Oca. Profesor de Matemática. Cuba

[2] Doctor en Ciencias y Profesor Asistente de la Universidad Hermanos Saiz Montes de Oca. Profesor de Matemática. Cuba

[3] Máster en Ciencias. Profesor Asistente, de la Universidad Hermanos Saiz Montes de Oca. Profesor de Matemática y Jefe del Departamento Educación Matemática. Cuba

ISSN: 2765-8252
Recepción: 28-10-2020 Aprobación: 12-01-2021

Introducción

La finalidad de la carrera Licenciatura en Educación Matemática en Cuba es formar un profesor capaz de dirigir el proceso pedagógico en general y, en particular, el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Matemática. Según el Modelo del profesional, Plan E (2016), se requiere formar un profesional de perfil amplio, que pueda enfrentar los problemas más generales y frecuentes que están presentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Uno de los principales objetivos de dicho modelo es "enseñar a formular y resolver problemas, utilizando contenidos de la matemática, sobre la base de la aplicación de procesos de pensamiento" (MES, 2016, p.6).

La disciplina Análisis Matemático (AM) forma parte del currículo base del plan de estudio de dicha carrera y sus contenidos giran en torno al importante concepto de límite funcional cuyo adecuado aprendizaje imprime una visión holística del cálculo diferencial e integral. Sin embargo, es tendencia histórica que los estudiantes presenten dificultades en el aprendizaje de los contenidos de la disciplina AM. Esto se evidencia, principalmente, en el bajo rendimiento académico de los estudiantes en las evaluaciones sistemáticas, trabajos de control parcial y exámenes finales.

A partir de dichas dificultades Nieves (2020) realizó un estudio exploratorio inicial donde concluye que los estudiantes presentan insuficientes niveles de abstracción para la comprensión de conceptos propios del AM, dificultad al hacer analogías y transferencias necesarias de las matemáticas elementales a las superiores, así como debilidades en la estructuración y organización lógica de saberes para la dirección racional de la actividad matemática relacionada con contenidos de Análisis Matemático.

Las insuficiencias anteriores tienen que ver con procesos cognitivos-instrumentales como la representación, abstracción, analogías, trasferencias y razonamiento a un nivel superior, condicionados por la complejidad que implica el aprendizaje de los contenidos de la disciplina AM. De este análisis preliminar se puede afirmar que dichas insuficiencias están muy vinculadas con el desarrollo del pensamiento matemático avanzado, que integra en sí dichos procesos cognitivos.

Por insuficiencias similares a las antes descritas, Azcárate y Camacho (2003, p.135) afirman que "… es en el seno del congreso del PME (Psychology of Mathematics Education) en 1985, cuando se forma un grupo de trabajo cuyo objetivo era estudiar la naturaleza del llamado pensamiento matemático avanzado". Este se crea con el objetivo de profundizar en las teorías y modelos cognitivos acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje del Análisis Matemático. Por tanto, dada la estrecha relación del pensamiento matemático avanzado con las insuficiencias mencionadas arriba, en lo adelante se asume el término como eje central de investigación.

Además, producto de la sistematización bibliográfica realizada también se pudo constatar que existe una limitada concepción didáctica y metodológica para el Proceso de Enseñanza-Aprendizaje (PEA) de los contenidos del AM, que deje la necesaria claridad sobre las vías para potenciar el nivel de abstracción para la comprensión de conceptos del AM, la significatividad del aprendizaje desarrollador de contenidos con paso al límite y el desarrollo de habilidades lógicas.

ISSN: 2765-8252
Recepción: 28-10-2020 Aprobación: 12-01-2021

Por la complejidad que entraña abordar esta temática y la multitud de aristas susceptibles de ser investigadas, se considera pertinente realizar un diagnóstico del proceso de desarrollo del PMA que deje la necesaria claridad sobre cómo potenciar el desarrollo del pensamiento matemático avanzado, que permita mejoras en el rendimiento académico de los estudiantes en la disciplina Análisis Matemático, de la carrera Licenciatura en Educación Matemática, en la Universidad de Pinar del Río, Cuba.

Fundamentado en lo anterior, el objetivo de este artículo es exponer los resultados de un diagnóstico del desarrollo del pensamiento matemático avanzado en estudiantes de la carrera Licenciatura en Educación Matemática de la Universidad de Pinar del Río, Cuba.

Algunas consideraciones sobre el desarrollo del pensamiento matemático avanzado

El pensamiento ha sido definido por González y otros (1995, p.173) como "… el proceso cognoscitivo que está dirigido a la búsqueda de lo esencialmente nuevo, y constituye el reflejo mediato y generalizado de la realidad". En este caso el descubrimiento de lo esencial de objetos y fenómenos de la realidad enriquece el contenido concreto del pensamiento.

Dicho descubrimiento es resultado de la realización de procesos de análisis y síntesis, abstracción, comparación, generalización, analogías, transferencias, la formulación de hipótesis, la formulación de problemas y el encontrar su solución, entre otros. Como resultado de dicha actividad mental, el individuo obtiene un conocimiento generalizado, conceptual, de las cosas del mundo material objetivo y adquiere conciencia de ello como resultado de un proceso de pensamiento.

Sobre la definición del *pensamiento como proceso,* Rubinstein (1966, pp.39-40) plantea que:

> … se piensa por medio de conceptos. El proceso de pensar constituye, a la vez, un movimiento de conocimientos. Ello es, precisamente, lo que da contenido al pensamiento. No se trata, como es notorio, de excluir del examen los frutos de la actividad mental sino de estudiarlos como expresión resultante de un proceso (…) dicho proceso es, ante todo, un análisis y una síntesis de lo que este nos proporciona; es, además, una abstracción y una generalización, derivadas de aquellos.

Luego, el pensamiento aparece siempre ligado a una modalidad específica de actividad y cada tipo específico de actividad, transmite al pensamiento peculiaridades distintas; cabe suponer que, si la actividad mental y el desarrollo del pensamiento se efectúan en una ciencia en particular, por ejemplo, en la matemática, se manifiesta lo que podría llamarse pensamiento matemático.

Asunción (2012), entiende el pensamiento matemático como parte de un ambiente científico, en el cual los conceptos y las técnicas matemáticas surgen y se desarrollan en la solución de tareas. Además, observa que el pensamiento matemático incluye por un lado, pensamiento sobre tópicos matemáticos y por otro, procesos avanzados del

ISSN: 2765-8252
Recepción: 28-10-2020 Aprobación: 12-01-2021

pensamiento como abstracción, justificación, visualización, estimación o razonamiento bajo hipótesis. Para describir el desarrollo del pensamiento matemático, Cantoral (2016, pp. 60-61) afirma que:

> … tendríamos que considerar que este suele interpretarse de distintas formas; por un lado se le entiende como una reflexión espontánea que los matemáticos realizan sobre la naturaleza de su conocimiento y sobre la naturaleza del proceso de descubrimiento e invención en matemáticas. Por otra, se entiende el pensamiento matemático como parte de un ambiente científico en el cual los conceptos y las técnicas matemáticas surgen y se desarrollan en la resolución de tareas; finalmente, una tercera visión considera que el pensamiento matemático se desarrolla entre todos los seres humanos al enfrentar cotidianamente múltiples tareas.

Para hacer referencia al término pensamiento matemático avanzado (PMA), Azcárate y Camacho (2003), ponen de manifiesto que el pensamiento matemático avanzado posee, por su naturaleza, procesos característicos entre los que destacan el nivel de abstracción, la formalización del conocimiento, la representación, la definición de los conceptos y la demostración. Según Aldana (2013, p.58), el PMA "… tiene que ver con los procesos mentales propios de las matemáticas superiores que se enseñan y se aprenden en los últimos años de bachillerato y en especial en el ámbito universitario".

Por otra parte, Herlina (2015, p.2), luego de hacer un análisis de varias caracterizaciones sobre el desarrollo del pensamiento matemático avanzado, dadas por expertos e investigadores en el tema, plantea que este "… es el proceso del pensar matemático que comprende procesos de representación, abstracción, pensamiento matemático creativo y la prueba matemática". En este caso se expresa el pensamiento matemático avanzado como un conjunto de procesos cognitivos, que intervienen en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

Para el diagnóstico que aquí presentamos asumimos la definición y parametrización dada por Nieves (2020, p.37), quien define el desarrollo del PMA desde la didáctica como:

> "el accionar didáctico del profesor para dirigir la actividad cognoscitiva de los estudiantes en el campo de la Matemática, con la finalidad de lograr avances progresivos en el nivel de abstracción, la definición de conceptos, la formalización del conocimiento, la representación conceptual y la demostración matemática".

El autor mencionado enfoca la definición citada en dos dimensiones. La dimensión 1 orientada al accionar del profesor y la dimensión 2 orientada al accionar de los estudiantes. A continuación, se describen dichas dimensiones con sus respectivos indicadores.

La dimensión 1: accionar didáctico del profesor para dirigir la actividad cognoscitiva de los estudiantes, en el trabajo con las características esenciales del PMA, se manifiesta en el sistema de acciones que el profesor planifica y pone en práctica durante el PEA de la disciplina AM.

Acciones para potenciar el nivel de abstracción

- Reactivación del sistema de conocimientos necesarios. Se manifiesta cuando el profesor reactiva en los estudiantes, mediante procedimientos heurísticos, los

Carlos Manuel Caraballo Carmona
Serdaniel Nieves Pupo
Yamila Caridad Páez Hernández
ISSN: 2765-8252
Recepción: 28-10-2020 Aprobación: 12-01-2021

conocimientos necesarios y cualidades esenciales de un sistema de conceptos, para el desarrollo de actividades matemáticas.
- Utilización del principio de analogía. Se manifiesta en las acciones del profesor para orientar a los estudiantes a que establezcan similitudes de razonamientos y equivalencia entre procedimientos, durante el desarrollo de actividades matemáticas.

Acciones para potenciar la definición de conceptos

- Aproximación formal en la definición de conceptos. Se manifiesta en las acciones que realiza el profesor para conducir a los estudiantes en la definición de conceptos, desde el trabajo con definiciones propias intuitivas hasta la definición formal institucionalizada.
- Precisión en la utilización de definiciones. Se evidencia en la utilización precisa y eficaz de las definiciones para elaborar y clasificar objetos matemáticos, así como en la determinación de procedimientos de trabajo para el desarrollo de tareas matemáticas.

Acciones para potenciar la formalización del conocimiento

- Utilización de la terminología convencional para la definición de conceptos. Se manifiesta en las acciones que realiza el profesor para que el estudiante se apropie del sistema de signos convencionales para denotar ideas matemáticas.
- Representación de un mismo contenido en lenguajes diferentes. Se manifiesta en las acciones que realiza el profesor para presentar un mismo contenido a los estudiantes en diferentes formas y lenguajes.

Acciones para potenciar la representación conceptual

- Utilización de esquemas conceptuales para modelar el contenido matemático. Se manifiesta en las acciones que utiliza el profesor para representar, esquematizar y modelar contenidos matemáticos o el desarrollo de tareas matemáticas.
- Utilización de mapas conceptuales para la visualización de relaciones y propiedades. Se manifiesta en las acciones del profesor dirigidas a la elaboración de mapas conceptuales para orientar la actividad racional de los estudiantes y que estos visualicen relaciones entre conceptos.

Acciones para potenciar la demostración matemática

- Utilización de procedimientos heurísticos en la búsqueda de una demostración. Se manifiesta en las acciones del profesor para lograr un clima de descubrimiento, que los estudiantes formulen hipótesis y establezcan relaciones.
- Rigurosidad en la representación de la demostración. Se manifiesta en la generalidad, solidez, precisión, argumentación, fundamentación y formalización con la que el profesor trabaja y presenta la demostración.

La dimensión 2: actividad cognoscitiva de los estudiantes, relacionada con las características esenciales del PMA, se aprecia a partir del desarrollo cualitativo y de las variaciones que, en función del contenido del pensamiento, experimentan los estudiantes en la comprensión de los procesos de su pensamiento y en la organización de su manifestación hacia un fin determinado; en el incremento de una apropiación cada

ISSN: 2765-8252
Recepción: 28-10-2020 Aprobación: 12-01-2021

vez más amplia y más hábil de los conocimientos, lo que incluye el componente conceptual teórico y práctico, así como la formación y desarrollo de habilidades relacionadas con el nivel de abstracción, la definición de conceptos, la formalización del conocimiento, la representación conceptual y la demostración matemática.

El nivel de abstracción

- Determinación de características esenciales en los análisis que se realizan durante el desarrollo de actividades matemáticas. Se manifiesta en la habilidad de los estudiantes para determinar lo que es esencial y obviar lo no esencial, así como de sintetizar lo esencial durante el desarrollo de tareas matemáticas.
- Coherencia en las argumentaciones. Se manifiesta en la habilidad de los estudiantes para comunicar con coherencia, de forma oral o escrita, las ideas esenciales que sustentan los razonamientos realizados.

La definición de conceptos

- Significatividad en la relación concepto-definición. Se manifiesta en el nivel de precisión y valoración que realizan los estudiantes sobre las relaciones esenciales entre el concepto y su definición durante el desarrollo de la actividad matemática.
- Utilización correcta de definiciones. Se manifiesta en la habilidad del estudiante para expresar y utilizar las cualidades esenciales del concepto, así como para algoritmizar definiciones en la búsqueda de nuevos conocimientos y soluciones a tareas matemáticas.

La formalización del conocimiento

- Conversión del lenguaje común al lenguaje técnico de la matemática. Se manifiesta en la habilidad del estudiante para expresar ideas del lenguaje común al lenguaje técnico de la matemática.
- Identificación de un mismo concepto en formalizaciones diferentes. Se manifiesta en la habilidad del estudiante para identificar proposiciones equivalentes en distintos lenguajes, para reformular tareas matemáticas y para buscar vías de solución.

La representación conceptual

- Utilización de esquemas gráficos de apoyo a la racionalización del trabajo mental. Se manifiesta en la habilidad del estudiante para crear y utilizar esquemas gráficos o dibujos auxiliares, que le permitan la comprensión y el análisis en el desarrollo de tareas matemáticas.
- Representación de un concepto en diferentes registros semióticos. Se manifiesta en la habilidad del estudiante para expresar, interpretar, manipular o identificar un mismo objeto matemático o idea matemática en diferentes registros semióticos.

La demostración matemática

- Logicidad en la búsqueda de la demostración. Se manifiesta en un adecuado razonamiento lógico en la búsqueda de la vía de demostración.
- Formalización en la representación de la demostración. Se manifiesta en la coherencia de la demostración, en una adecuada fundamentación y utilización correcta de la terminología matemática.

ISSN: 2765-8252
Recepción: 28-10-2020 Aprobación: 12-01-2021

Metodología para el diagnóstico del pensamiento matemático avanzado

Para desarrollar el diagnóstico se seleccionaron de manera aleatoria 42 estudiantes entre segundo y quinto años de la carrera Licenciatura en Educación, Matemática. En el caso de los profesores, se tomaron los 10 profesores que imparten la disciplina AM en dicha carrera.

Inicialmente, se realizó un estudio de los documentos normativos de la carrera. Posteriormente, se aplicó una prueba pedagógica de forma interactiva, para evaluar los indicadores del desarrollo del PMA, según las respuestas de los estudiantes a tareas matemáticas, donde necesariamente deben emplear habilidades asociadas a este tipo de pensamiento.

Después, se realizó una entrevista a los estudiantes para conocer sus creencias y concepciones relacionadas con el desarrollo de las características esenciales del PMA y enriquecer los resultados de la prueba pedagógica anterior.

Con el objetivo de corroborar las causas que originaron los resultados obtenidos en la prueba pedagógica interactiva, se realizó la observación científica a 60 clases de Análisis Matemático. Para verificar el origen de los resultados obtenidos con la aplicación de los instrumentos anteriores, se realizó una encuesta a 10 profesores de la disciplina AM con el objetivo de diagnosticar la preparación científico-metodológica que poseen los profesores, para contribuir a potenciar el desarrollo del PMA, desde el PEA de la disciplina AM.

Para medir y evaluar el desarrollo del PMA se tendrá en cuenta la definición dada anteriormente con sus respectivas dimensiones e indicadores. A cada indicador se le otorgará un valor de 1 a 5 puntos con el siguiente consenso: [muy adecuado (MA) = 5], [bastante adecuado (BA) = 4], [adecuado (A) = 3], [poco adecuado (PA) = 2], [inadecuado (IA) = 1].

El índice de la dimensión por estudiante (I_{est}), se determinará como: $I_{est} = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i \cdot C_{e_i}}{P_m T}$ donde n son todos los valores de la escala, V_i es el valor del indicador i, C_{e_i} es la cantidad de evaluaciones que se le otorgó al indicador i, P_m es el puntaje máximo de ponderación y T es el total de indicadores u observaciones por indicador (en caso de que se evalúe el indicador). El índice máximo es 1 cuando $V_i = P_m$ para todo $i = 1; 2; 3 \dots n$ y el mínimo es $\frac{T M\acute{\imath}n\{V\}}{P_m T} = \frac{M\acute{\imath}n\{V\}}{P_m}$.
La escala determinada es:

Evaluación	(MA)	(BA)	(A)	(PA)	(I)
Índice	$(0{,}85; 1]$	$(0{,}70; 0{,}85]$	$(0{,}55; 0{,}70]$	$(0{,}40; 0{,}55]$	$(0{,}20; 0{,}40]$

Tabla 1: Escala para determinar la evaluación a partir del índice

A continuación, se presenta la prueba pedagógica interactiva cuyo objetivo es evaluar el nivel de desarrollo alcanzado por los estudiantes en las características esenciales del PMA, mediante el desarrollo de actividades relacionadas con los contenidos de límite, continuidad, derivada de una función y la demostración matemática.

Carlos Manuel Caraballo Carmona
Serdaniel Nieves Pupo
Yamila Caridad Páez Hernández
ISSN: 2765-8252
Recepción: 28-10-2020 Aprobación: 12-01-2021

Cuestionario

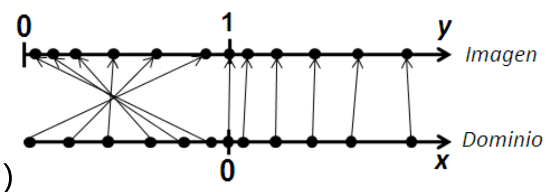
1. Sea la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la ley de correspondencia está dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} -2x & si \;\; x < 0 \\ \sqrt{x} + 1 & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$$

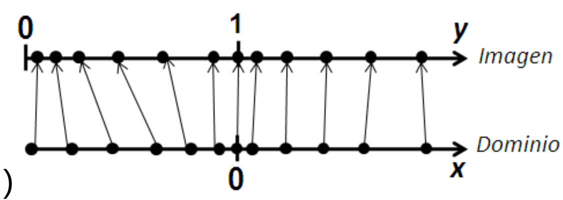
a) ¿f se puede representar en un solo sistema de coordenadas rectangulares?
b) ¿Es necesario representar la función f en dos sistemas de coordenadas rectangulares?
c) Representa gráficamente la función f

El profesor indicará a los estudiantes que utilizaron dos sistemas de coordenadas: "Explica por qué hay que representar la función en dos sistemas".

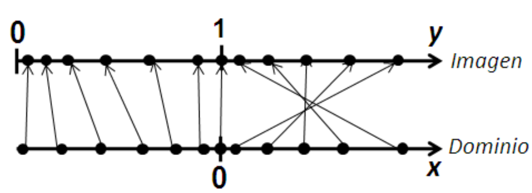
1.1 Diga verdadero (V) o falso (F): sea la función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(t) = -2t$ para $t < 0$ y $g(t) = \sqrt{t} + 1$ para $t \geq 0$. Entonces para todos los valores del dominio de las funciones f y g se cumple que:
a) ___ $f = g$ _____ $f \neq g$
b) Fundamenta cada caso anterior.
1.2 Si nos acercamos (por la derecha y por la izquierda) al valor del dominio $x = 0$. Seleccione el esquema más sugerente que describe la relación dominio-imagen de f.



I)



II)



III)

1.3 Calcule los límites laterales de la función f en el punto $x = 0$.
a) ¿Existe el límite en dicho punto? Argumenta.
1.4 Enuncie la definición de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ en el lenguaje de sucesiones y en el lenguaje $\epsilon - \delta$. En caso de que no las recuerde con precisión, explique con sus palabras el significado de límite.

ISSN: 2765-8252
Recepción: 28-10-2020 Aprobación: 12-01-2021

El profesor revisará y registrará la cantidad de estudiantes que logró enunciar una definición, dos definiciones y los que explicaron con sus palabras. Evaluará a cada uno según a la repuesta dada. Posteriormente, escribirá en pizarra las definiciones:

Definición 1

Se dice que $l \in \mathbb{R}$ es límite de la función $f$cuando x tiende al punto a si se verifica que para toda sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \in Domf$, $x_n \to a$, y $x_n \neq a$, se cumple que$f(x_n) \to l$

Definición 2

$\lim_{x\to a} f(x) = l$, si y solo si, para todo $\epsilon > 0$, tal que si $x \in Domf$ y $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \epsilon$

1.5 A su consideración:
a) ¿cuál de las definiciones anteriores consideras que es más práctica para demostrar la existencia o no del $\lim_{x\to 0} f(x)$?
b) Escoja una de las dos definiciones y demuestre que $\lim_{x\to 0} f(x)$no existe.
c) ¿Qué tipo de demostración utilizaste?

1.6 Analice la continuidad de $f(x)$ en el intervalo $I = [-1; 1]$.

2. En el gráfico 2.1, se tienen las rectas r, t y $f(x) = lnx$, tal que $r \cap f = \{A, B\}$ y $t \cap f = \{A\}$. Diga verdadero o falso. Argumente en cada caso.
   a) ___ La recta r es tangente al gráfico de la función en los puntos A y B.
   b) ___ Si la pendiente de r es m_r entonces $m_r = tan\theta = f^{\prime}(1)$
   c) ___ Si$f^{\prime}(1)$ es la derivada de f para $x = 1$, entonces la pendiente de la recta$t$ es $m_t = f^{\prime}(1)$.

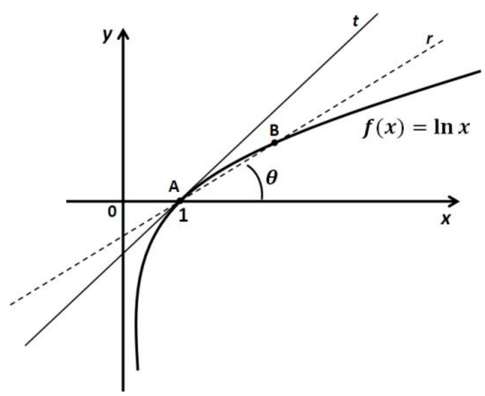


Gráfico 2.1

3. En el gráfico 3.1 se tienen las funciones $h(t) = at + b$ y $w(t) = 3t - t^2$,$Graf(h) \cap Graf(w) = \{P\}$.
a) Utilice la definición, calcule la función derivada $w^{\prime}(t)$.
b) Halle la ecuación de $h(t)$.

ISSN: 2765-8252
Recepción: 28-10-2020 Aprobación: 12-01-2021

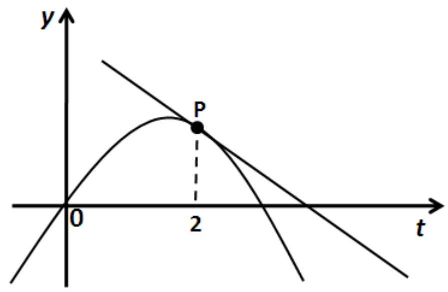


Gráfico 3.1

	Indicadores	Actividades
1	Determinación de características esenciales en los análisis que se realizan durante el desarrollo de actividades matemáticas.	1. a), b) c); 1.1 b); 1.3 a); 1.5 c); 1.6
2	Coherencia en las argumentaciones.	1. a) b); 1.1 b); 1.3 a); 1.5 a), c); 2 a), b), c); 3. b)
3	Significatividad en la relación concepto-definición.	1.1 a); 1.2; 2 a), b), c)
4	Utilización correcta de definiciones.	1.4; 1.5 b); 2 a); 3 a)
5	Conversión del lenguaje común al lenguaje técnico de la matemática.	1.3 a); 1.4; 1.5 b); 3. a) b)
6	Identificación de un mismo concepto en formalizaciones diferentes.	1.1 a); 2. b) c)
7	Utilización de esquemas gráficos de apoyo a la racionalización del trabajo mental.	1. a), b); 1.1 a); 1.3 a); 1.5 b)
8	Representación de un concepto en diferentes registros semióticos.	1. c); 1.1 a); 3. a) b)
9	Logicidad en la búsqueda de la demostración.	1.5 b); 1.3 a); 2. a); 1.6
10	Formalización en la representación de la demostración.	1.5 b)

Se debe aclarar que esta organización no es la única para visualizar la presencia de indicadores, pueden existir otras actividades dentro de la prueba pedagógica interactiva en la que se presencie mejor un determinado indicador, en dependencia de la respuesta del estudiante.

Resultados del diagnóstico. Discusión

A continuación, se hace un análisis, por indicador, de los resultados alcanzados en la prueba pedagógica y se complementan con los resultados de la entrevista a los estudiantes, las observaciones a clases y la encuesta a profesores de AM.

ISSN: 2765-8252
Recepción: 28-10-2020 Aprobación: 12-01-2021

Análisis del nivel de abstracción

En la prueba pedagógica interactiva se evaluó como poco adecuada, tanto la determinación de características esenciales en los análisis que se realizan durante el desarrollo de actividades matemáticas, como la coherencia en las argumentaciones; por ejemplo en la pregunta 1, 24 (57,1%) estudiantes presentaron dificultades para visualizar $f(x)$ como función única, estos analizan las ramas de la función como dos funciones distintas; 32 (76,2%) estudiantes no son capaces determinar características esenciales para relacionar dominio e imagen (pregunta 1.2); en la pregunta 1.6, 11 (26,2%) estudiantes analizaron correctamente que f es discontinua en $x_0 = 0$, pero en la respuesta no generalizaron a todo el intervalo; como potencialidad se observó que los estudiantes que utilizan esquemas argumentaron adecuadamente. En la entrevista a los estudiantes, estos no reconocen la necesidad de estudiar los contenidos del AM, la mayoría manifestó que les es difícil comprender los conceptos y resolver problemas relacionados con el límite, y el cálculo diferencial e integral.

Lo anterior se corroboró en las observaciones realizadas a clases, donde se encontró como tendencia que los profesores no mantienen una regularidad en el trabajo para potenciar el nivel de abstracción, por ejemplo, en el (36) 60% de las evaluaciones es insuficiente la utilización del principio de analogía para vincular las experiencias cognoscitivas del estudiante similares a las que se enseñan; además aunque la reactivación de los conocimientos necesarios se evaluó como adecuada, en 26 (43,3%) clases se evaluó como insuficiente. La utilización adecuada de procedimientos heurísticos es indispensable para potenciar el nivel de abstracción, sin embargo en la encuesta a profesores, las orientaciones metodológicas de la disciplina y asignaturas se evaluaron de poco adecuado.

Análisis de la definición de conceptos

En la prueba pedagógica, tanto la significatividad en la relación concepto-definición como la utilización correcta de definiciones se evaluó como poco adecuada; por ejemplo, en la pregunta 1.5 c), 34 (80,9%) estudiantes presentaron dificultades al utilizar elementos de la definición de límite; en la pregunta 1.4, 9 (21,4%) estudiantes intentaron explicar el concepto de límite y su definición pero la descripción no fue adecuada y 18 (42,9%) no lo hicieron. En la encuesta realizada a los estudiantes, la mayoría no establece diferencia entre concepto y definición.

En relación con las limitaciones anteriores, durante la observación científica a clases, se pudo constatar que las acciones del profesor para dirigir a los estudiantes en la elaboración de conceptos mediante aproximaciones formales se evaluó de poco adecuada, en este caso la elaboración de conceptos no se concibe adecuadamente en las tareas docentes que propone el profesor, no se explicita en la estructura de ejercicios o problemas, ni forma parte de la evaluación; dichas deficiencias se observaron en 25 (41,7%) clases; la precisión en el proceso de definición de conceptos se evaluó de adecuado, pero en 19 (31,7%) clases fue insuficiente. Además, en la encuesta a profesores, las orientaciones metodológicas dirigidas al trabajo con el concepto y su definición se evaluaron como poco adecuadas.

Análisis de la formalización del conocimiento

ISSN: 2765-8252
Recepción: 28-10-2020 Aprobación: 12-01-2021

En la prueba pedagógica interactiva, tanto la conversión del lenguaje común al lenguaje técnico de la matemática, como la identificación de un mismo concepto en formalizaciones diferentes se evaluaron de adecuadas, pero en las observaciones a clases este último indicador se evaluó como poco adecuado, el cual se constató como insuficiente en 45 (75%) clases; por ejemplo, de la prueba pedagógica se concluyó que los estudiantes, por lo general, no recuerdan con precisión las definiciones y presentan dificultades al formalizar proposiciones y características esenciales; además, en las observaciones a clases se comprobó que los estudiantes no usan correctamente la terminología establecida en las definiciones de conceptos y no son consecuentes con las expresiones simbólicas establecidas para definir los objetos matemáticos y cuando las utilizan, lo hacen de forma incoherente o no completan los símbolos correctamente.

Análisis de la representación conceptual

En la prueba pedagógica se evaluó de poco adecuada, tanto la utilización de esquemas gráficos de apoyo a la racionalización del trabajo mental, como la representación de un concepto en diferentes registros semióticos; por ejemplo, en la pregunta 1.3, 30 (71,4%) estudiantes afirmaron que no existe el límite, pero de estos, 19 (45,2%) habían representado mal la función en la actividad 1. c), esto quiere decir que no les fue necesaria la representación gráfica para calcular bien el límite, pero entonces no hubo coordinación de registros semióticos, ni significatividad, ni logicidad en sus razonamientos, además en la entrevista, la mayoría de los estudiantes planteó que en AM no se pueden hacer esquemas que es más trabajar con variables y, por tanto, estos no sirven para buscar soluciones.

Las causas de las limitaciones anteriores se evidenciaron durante las observaciones a clases, donde se evaluó como poco adecuadala utilización de esquemas conceptuales para modelar el contenido matemático y se comprobó que es insuficiente en 41 (68,3%) clases. También la utilización de mapas conceptuales para la visualización de relaciones entre conceptos se evaluó de poco adecuada, en este caso fue insuficiente en 44 (73,3%) de las clases visitadas, los profesores presentaron limitaciones metodológicas para elaborar y utilizar esquemas conceptuales y modelos gráficos de apoyo a los contenidos que enseñan. Además, en la encuesta a profesores se evaluó como poco adecuada las orientaciones metodológicas para la utilización de esquemas y el trabajo con los mapas conceptuales en la disciplina AM.

Análisis de la demostración matemática

En la prueba pedagógica interactiva, se evaluó de inadecuada tanto la logicidad en la búsqueda de la demostración, como la formalización en la representación de la demostración; por ejemplo, en los resultados de la pregunta 1.5 b), solo 8 (19%) estudiantes demostraron bien la no existencia del límite, los 34 (80,9%) restantes presentaron insuficiencias, también se constató que para realizar la demostración, presentan incoherencias en la utilización de símbolos, falta de equivalencia y logicidad en la secuencia de razonamientos, además 37 (88,1%) no identificaron correctamente el tipo de demostración. En la entrevista, la mayoría de los estudiantes afirmó que en AM casi nunca se demuestra, solo se calcula límite, derivadas, se grafican funciones, etc., además tienen escasos conocimientos sobre la habilidad demostrar y desconocen las vías de demostración.

ISSN: 2765-8252
Recepción: 28-10-2020 Aprobación: 12-01-2021

Durante las observaciones a clases, se evaluó de adecuada la utilización de procedimientos heurísticos en la búsqueda de una demostración, pero fue insuficiente en 19 (31,7%) clases; en 27 (45,0%) clases, la rigurosidad en la representación de la demostración fue insuficiente; se pudo constatar que las principales limitaciones en la enseñanza de la demostración matemática se encuentran en la explicación y fundamentación lógica de las vías de demostración que se utilizan, en las ventajas y desventajas del método utilizado y en el análisis de la rigurosidad en la demostración. Además, en la encuesta a profesores se evaluó como poco adecuada las orientaciones metodológicas para el trabajo con las demostraciones matemáticas dentro de la disciplina AM.

> En este sentido es válido denotar que "… aunque la base de orientación ayuda al alumno a planificar el proceso de resolución y lo dota de acciones y procedimientos que le son de ayuda al enfrentarse a una tarea, es el hecho de introducir instrumentos autorregulativos promueve que el alumno desarrolle procesos metacognitivos complejos" (Torregrosa y Albarracín (2020, p. 17).

Conclusiones

El pensamiento es un proceso cognoscitivo que se estudia desde la filosofía, la psicología y la lógica, el PMA como caso particular se caracteriza por la progresiva importancia que adquieren los procesos cognitivos relacionados con nivel de abstracción, la formalización, la representación, la definición y la demostración, para comprender contenidos matemáticos con paso al límite.

Abordar el desarrollo del PMA desde la didáctica implica tener en cuenta tanto el desempeño metodológico del profesor y como la actuación cognitiva de los estudiantes, los cuales constituyen actores fundamentales en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Estas dos perspectivas hacia el desarrollo del PMA devienen en dimensiones las cuales se pueden parametrizar para diseñar instrumentos de diagnóstico.

Mediante el diagnóstico se constató que existen limitaciones de orden teórico y epistemológico para un adecuado tratamiento metodológico a contenidos matemáticos relacionados con el concepto de límite; además, los resultados del diagnóstico indican que los significados que los estudiantes construyen sobre los conceptos, definiciones y teoremas del AM, están vinculados a determinados modos de representación y que tales significados no están relacionados.

Existe una fuerte dependencia entre la racionalización del trabajo mental, el nivel de abstracción y la utilización de esquemas gráficos para la comprensión de contenidos matemáticos en los que intervienen procesos con paso al límite. Además, es importante destacar que la utilización adecuada de recursos heurísticos, la coordinación de registros semióticos y la utilización de mapas conceptuales son recursos indispensables en la intervención metodológica del profesor para contribuir al desarrollo del PMA.

ISSN: 2765-8252
Recepción: 28-10-2020 Aprobación: 12-01-2021

Referencias

Asunción, M. (2012). *Apuntes teóricos sobre el pensamiento matemático y multiplicativo en los primeros niveles*, ISSN: 2254-8351SN: 2254-8351. Universidad de Almería.

Azcárate, C. y Camacho (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, No. 2 135-146.

Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Ciudad de México, México. Gedisa, S.A. (segunda edición).

González, V. y otros. (1995). *Psicología para educadores*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Herlina, E. (2015). Advanced Mathematical Thinking and the Way to Enhance IT. *Journal of Education and Practice*. ISSN 2222-1735 (Paper) ISSN 2222-288X (Online). Vol.6, No.5, 2015. Pág. 2.

Modelo del Profesional (2016). *Carrera: Licenciatura en Educación Matemática. Plan E*: Ministerio de Educación Superior, Cuba.

Nieves, S. (2020). *El desarrollo del pensamiento matemático avanzado desde la disciplina Análisis Matemático*. Tesis doctoral. Instituto Central de Ciencias Pedagógicas (ICCP). Cuba.

Rubistein, S. L. (1966). *El proceso del pensamiento. El pensamiento y los caminos de su investigación. Las leyes del análisis, la síntesis y la generalización*. La Habana, Cuba. Editora Universitaria

Torregrosa, A. y Albarracín, L. (2020). Caracterización de procesos metacognitivos en la resolución de problemas de numeración y patrones matemáticos. *Revista Educación Matemática.* Vol. 32. Núm. 3. Disponible en: http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol32/3/02REM32-3.pdf